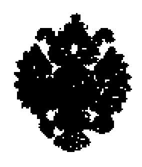
СПОСОБЪ

НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.

Проф. В. П. Ермакова.





КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета св. Владиміра Акц. О-ва печ. и изд. дѣла
Н. Т. Корчакъ-Новицкаго, Меринговская ул., д. № 6.
1905

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра.

СОДЕРЖАНІЕ.

Способъ наименьшихъ квадратовъ.

(Обработка опытныхъ данныхъ).

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ способѣ наименьшихъ квадратовъ даются правила для составленія эмпирической формулы, такъ чтобы она возможно точнѣе выражала данный опытъ. Сверхъ того этотъ способъ показываетъ, какъ расположить опытъ для полученія наиболѣе точныхъ результатовъ. По способу наименьшихъ квадратовъ написаны обширные трактаты. Въ этихъ сочиненіяхъ входятъ опредѣленные интегралы, вводятся разные термины, напр. вѣроятность ошибки, вѣроятная ошибка. Но все это весьма мало пригодно для практики. Практику нужно дать точныя простыя правила, какъ обработать опытныя данныя. Эти правила могутъ быть изложены въ краткой, ясной и строго обоснованной формѣ. Способъ наименьшихъ квадратовъ можетъ быть изложенъ независимо отъ теоріи вѣроятностей. Изъ этой теоріи въ опытныхъ наукахъ имѣетъ большое значеніе только такъ называемый законъ большихъ чиселъ. Но законъ большихъ чиселъ извѣстенъ съ весьма древнихъ временъ; его примѣняли въ практикѣ еще до появленія теоріи вѣроятностей. Яковъ Бернулли далъ въ XVII-мъ столѣтіи математическое доказательство закона большихъ чиселъ. Практикъ можетъ не знать этого доказательства, и тѣмъ не менѣе можетъ съ успѣхомъ примѣнять законъ большихъ чиселъ въ своихъ изслѣдованіяхъ. Скажемъ нѣсколько словъ, какъ слѣдуетъ понимать законъ большихъ чиселъ.

I.

Законъ большихъ чиселъ.

Каково бы ни было случайное явленіе, при весьма большомъ числѣ наблюденій всегда обнаруживается нѣкоторый законъ, управляющій этимъ

явленіемъ; этотъ законъ извѣстенъ подъ названіемъ закона большихъ чиселъ; точная его формулировка выражается въ слѣдующихъ словахъ:

При весьма большомъ числѣ наблюденій наблюдаемыя величины находятся въ постоянномъ отношеніи.

Поясним сказанное. Почтовая контора иногда не можетъ доставить письма на домъ по неполнотѣ или невѣрности адреса. Если мы сосчитаемъ въ теченіе года число такихъ писемъ и раздѣлимъ это число на число всѣхъ писемъ, то найденное отношеніе изъ года въ годъ будетъ постояннымъ для данной почтовой конторы. Конечно, сказанное имѣетъ мѣсто для почтовой конторы съ большимъ оборотомъ. Точно также, если мы въ большомъ городѣ сосчитаемъ въ теченіе года число эпидемическихъ заболѣваній, число преступленій, число самоубійствъ и т. д. и раздѣлимъ эти числа на число всѣхъ жителей, то найденныя отношенія окажутся постоянными съ теченіемъ времени.

Однако, законъ большихъ чиселъ въ примѣненіи къ соціальнымъ явленіямъ оказывается неточнымъ. Дѣло въ томъ, что законъ большихъ чиселъ несомнѣнно указываетъ, что случайными явленіями управляютъ нѣкоторыя намъ неизвѣстныя или мало извѣстныя причины; но эти причины могутъ измѣняться. Такъ съ проведеніемъ канализаціи отношеніе числа эпидемическихъ заболѣваній къ числу всѣхъ жителей значительно уменьшается. Статистикъ въ концѣ своихъ изслѣдованій всегда прилагаетъ отношенія наблюдаемыхъ величинъ. Если эти отношенія въ послѣдующіе годы мѣняются, то это указываетъ на измѣненіе соціальныхъ явленій. Это указаніе даетъ поводъ къ разысканію причинъ, повліявшихъ на измѣненіе соціальныхъ явленій.

Закону большихъ чиселъ можно дать еще другую формулировку:

Средняя ариөметическая величина, найденная изъ многихъ наблюденій, съ возрастаніемъ числа наблюденій стремится къ постоянному предѣлу.

Но если въ первой формулировкѣ законъ большихъ чиселъ уже оказывается неточнымъ въ примѣненіи къ соціальнымъ явленіямъ, то вторая формулировка этого закона прямо непримѣнима къ соціальнымъ явленіямъ. Поясним это. Въ почтовой конторѣ сосчитаемъ за много дней число писемъ съ невѣрнымъ и неполнымъ адресомъ; раздѣлимъ это число на число дней; въ результатѣ получимъ среднее ежедневное число писемъ недоставленныхъ на домъ. Согласно второй формулировкѣ закона большихъ чиселъ это число должно быть постояннымъ. На самомъ дѣлѣ этого не бываетъ по двумъ причинамъ: съ развитіемъ культуры и съ возрастаніемъ народонаселенія число всѣхъ писемъ возрастаетъ, а слѣдовательно и возрастаетъ число писемъ съ невѣрнымъ и неполнымъ адресами.

Но въ наукахъ наблюдательныхъ, гдѣ опытъ производится при одной и той же обстановкѣ и при неизмѣнныхъ условіяхъ, законъ большихъ чиселъ въ первой и во второй формулировкѣ вполнѣ примѣнимъ.

2.

Ошибки постоянныя и случайныя. Исключеніе постоянныхъ ошибокъ.

При всякомъ наблюденіи, хотя бы и самыми точными инструментами, мы обыкновенно дѣлаемъ ошибки. Ошибки бываютъ двухъ родовъ: случайныя и постоянныя. Случайныя ошибки зависятъ отъ вполнѣ случайныхъ, намъ неизвѣстныхъ, причинъ. Случайныя ошибки съ одинаковою вѣроятностью могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными. Постоянныя ошибки зависятъ отъ нѣкоторыхъ постоянныхъ причинъ. Постоянная ошибка по большей части уклоняется въ одну сторону, т. е. бываетъ либо положительною, либо отрицательною.

Мы не всегда можемъ устранить изъ опыта постоянныя причины, вліяющія на появленіе постоянныхъ ошибокъ. Но тѣмъ не менѣе, при внимательномъ отношеніи къ опыту, мы почти всегда можемъ исключить постоянныя ошибки. Постоянныя ошибки чаще всего зависятъ отъ несовершеннаго устройства измѣрительныхъ приборовъ. Пояснимъ сказанное на двухъ примѣрахъ.

Положимъ, что мы измѣряемъ уголъ дугою круга. Если центръ вращенія не совпадаетъ съ центромъ круга, то отмѣренныя дуги не будутъ пропорціональны угламъ. Для исключенія этой постоянной ошибки поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Измѣряемъ дугу, соотвѣтствующую данному углу; поворачиваемъ измѣрительный кругъ на 180 градусовъ и снова отсчитываемъ дугу; полусумма найденныхъ дугъ даетъ намъ точную величину измѣряемаго угла.

Положимъ, что намъ нужно найти наклоненіе магнитной стрѣлки. Наблюденіе наше будетъ невѣрно, если ось вращенія не проходитъ черезъ центръ тяжести магнитной стрѣлки. Эту постоянную ошибку можно исключить слѣдующимъ способомъ. Наблюдаемъ наклоненіе магнитной стрѣлки; перемагничиваемъ стрѣлку (чтобы полюсы перемѣнили свои мѣста) и снова находимъ наклоненіе; полусумма найденныхъ наклоненій дастъ намъ точную величину магнитнаго наклоненія.

Изъ этихъ примѣровъ выясняется, что при внимательномъ отношеніи къ опыту, не устраняя постоянныхъ причинъ, мы всегда можемъ исключить изъ наблюденія постоянныя ошибки. Далѣе мы будемъ предполагать, что постоянныя ошибки исключены изъ наблюденія.

3.

Средняя ариѳметическая величина ошибки; сумма квадратовъ ошибокъ.

Положимъ, что изъ наблюденія исключены постоянныя ошибки. Случайныя ошибки, какъ сказано раньше, съ одинаковою вѣроятностью могутъ быть и положительными и отрицательными. Положимъ, что какую нибудь величину мы наблюдаемъ много разъ, и при каждомъ наблюденіи вычисляемъ ошибку; возьмемъ сумму всѣхъ ошибокъ и раздѣлимъ на число наблюденій; въ результатѣ получимъ среднюю ариѳметическую величину ошибки. Согласно второй формулировкѣ закона большихъ чиселъ, эта величина съ возрастаніемъ числа наблюденій должна стремиться къ постоянному предѣлу. Каковъ же этотъ предѣлъ? Если бы этотъ предѣлъ былъ отличенъ отъ нуля, то это обстоятельство указывало бы на существованіе постоянной ошибки; но постоянныя ошибки исключены изъ опыта. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Средняя ариѳметическая величина ошибки, съ возрастаніемъ числа наблюденій, стремится къ нулю.

Положимъ теперь, что мы наблюдаемъ какую нибудь величину нѣсколько разъ; пусть наблюдаемыя величины будутъ $a_1, a_2, \ldots a_n$; обозначимъ наиболѣе вѣроятную величину черезъ x; тогда случайныя ошибки наблюденій будутъ: $x-a_1$, $x-a_2, \ldots x-a_n$. На основаніи послѣдней теоремы мы можемъ положить:

$$\frac{(x-a_1)+(x-a_2)+\cdots\cdots+(x-a_n)}{n}=0.$$

Отсюда находимъ:

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}. \tag{1}$$

Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Наиболѣе вѣроятная величина равна средней ариѳметической величинѣ изъ всѣхъ наблюдаемыхъ величинъ.

Возьмемъ сумму квадратовъ ошибокъ:

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots\cdots+(x-a_n)^2.$$

Принимая x за неизвѣстное, опредѣлимъ его такъ, чтобы сумма квадратовъ ошибокъ пріобрѣтала наименьшее значеніе. Для этого нужно производную приравнять нулю:

$$2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots\cdots+2(x-a_n)=0.$$

Изъ этого уравненія для x найдемъ прежнее значеніе (1). Поэтому прежнее правило для полученія наиболѣе вѣроятной величины мы можемъ выразить въ новой формѣ:

Наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ наблюдаемой величины будетъ то, которое обращаетъ сумму квадратовъ ошибокъ въ наименьшую величину.

Отсюда вытекаетъ названіе способа наименьшихъ квадратовъ. Далѣе мы увидимъ, что изъ этого правила путемъ логическихъ умозаключеній мы получимъ новыя правила для нахожденія наиболѣе вѣроятныхъ значеній при сложныхъ наблюденіяхъ.

4.

Средняя ошибка; вѣсъ наблюдаемой величины.

Обозначимъ ошибки, сдѣланныя при наблюденіяхъ одной величины черезъ $a_1, a_2, \ldots a_n$. *Среднею ошибкою* принято называть корень квадратный изъ суммы квадратовъ ошибокъ, раздѣленной на число наблюденій:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Величина средней ошибки указываетъ намъ на степень точности наблюденія. Понятно, что чѣмъ менѣе сами ошибки, тѣмъ менѣе будетъ и средняя ошибка. Поэтому чѣмъ менѣе средняя ошибка, тѣмъ точнѣе наблюденіе.

Величина, обратная квадрату средней ошибки, называется *вѣсомъ наблюдаемой величины:*

$$p = \frac{C}{\varepsilon^2}. \tag{1}$$

Очевидно, чѣмъ болѣе вѣсъ, тѣмъ менѣе средняя ошибка и тѣмъ точнѣе наблюденіе. Въ выраженіе для вѣса (1) входитъ постоянная величина C, которая можетъ быть взята по произволу. Если мы имѣемъ дѣло съ нѣсколькими наблюдаемыми величинами, то постоянное C можно опредѣлить такъ, чтобы вѣсъ одной наблюдаемой величины равнялся единицѣ. Такимъ образомъ далѣе мы будемъ говорить только объ относительныхъ величинахъ вѣсовъ наблюдаемыхъ величинъ.

Въ практикѣ часто приходится судить о вѣсахъ наблюдаемыхъ величинъ, не дѣлая самихъ наблюденій; при чемъ, какъ сказано выше, вѣсъ одной величины можетъ быть принятъ за единицу. Какъ же судить о вѣсахъ наблюдаемыхъ величинъ, не дѣлая самихъ наблюденій?

Если мы имѣемъ дѣло съ однородными величинами, которыя наблюдаются одинаковыми приборами при неизмѣнныхъ условіяхъ, то мы мо-

жемъ утверждать, что вѣса такихъ величинъ одинаковы. Какъ, далѣе, находить вѣса неоднородныхъ величинъ?

Всматриваясь внимательно въ наблюденія, мы замѣчаемъ, что почти всѣ наблюденія приводятся къ измѣренію линейныхъ отрѣзковъ. Такъ, температура измѣряется на термометрической скалѣ, давленіе на барометрической или манометрической скалѣ, уголъ измѣряется дугою круга; скорость, ускореніе и сила также приводятся къ линейнымъ измѣреніямъ. Если всѣ величины измѣряются при одномъ и томъ же маштабѣ, то мы можемъ утверждать, что вѣса такихъ величинъ одинаковы. Предположимъ, далѣе, что мы измѣряемъ углы двумя кругами, при чемъ радіусъ второго круга вдвое болѣе радіуса перваго круга; тогда градусъ на второмъ кругѣ вдвое болѣе градуса на первомъ кругѣ. Очевидно, что ошибка при измѣреніи угла вторымъ кругомъ будетъ вдвое менѣе; поэтому вѣсъ, на основаніи формулы (1), будетъ вчетверо болѣе. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Вѣса наблюдаемыхъ величинъ пропорціональны квадратамъ линейныхъ отрѣзковъ, принятыхъ за единицу измѣреній.

Но всякое заключеніе въ опытныхъ наукахъ нужно принимать съ весьма большою осторожностью. Такъ измѣрять отрѣзокъ на бумагѣ не то же самое, что измѣрять отрѣзокъ на поверхности земли: на бумагѣ мы можемъ откладывать десятыя доли сантиметра, на поверхности земли не можетъ быть и рѣчи о сантиметрахъ. Такимъ образомъ опредѣленіе вѣсовъ наблюдаемыхъ величинъ представляетъ довольно трудную задачу; рѣшеніе этой задачи можетъ быть найдено только при помощи наблюденій.

5.

Вѣсъ функціи наблюдаемыхъ величинъ.

Во многихъ опытахъ, особенно въ геодезіи, мы можемъ выбирать наблюдаемыя величины по произволу; въ результатѣ же намъ приходится вычислять нѣкоторую величину, какъ функцію наблюдаемыхъ величинъ. Обозначимъ наблюдаемыя величины черезъ u, v, w, ...; положимъ, что намъ нужно вычислить величину x по формулѣ:

$$x = f(u,\ v,\ w,\ \ldots). \tag{1}$$

Прежде всего намъ нужно знать, съ какою точностью вычислена величина x, что приводится къ нахожденію вѣса этой величины. Для этой цѣли поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что каждую величину u, v, w, ... мы наблюдаемъ нѣсколько разъ; обозначимъ

ошибки u черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, число наблюденій черезъ n_1,

ошибки v черезъ $\beta_1, \beta_2, \ldots$, число наблюденій черезъ n_2,

ошибки w черезъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, число наблюденій черезъ n_3,

. . . .

Положимъ

$$n = n_1 n_2 n_3 \ldots .$$

Изъ ряда найденныхъ ошибокъ выберемъ для каждой величины по одной ошибкѣ; пусть эти ошибки будутъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; соотвѣтственную величину ошибки x обозначимъ черезъ δ. Въ такомъ случаѣ уравненіе (1) превратится въ слѣдующее:

$$x + \delta = f(u + \alpha,\ v + \beta,\ w + \gamma, \ldots).$$

Вычитая отсюда уравненіе (1), получаемъ:

$$\delta = f(u + \alpha,\ v + \beta,\ w + \gamma, \ldots) - f(u,\ v,\ w, \ldots).$$

Разложимъ вторую часть по степенямъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и отбросимъ весьма малыя величины выше перваго порядка:

$$\delta = \frac{\partial f}{\partial u}\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\beta + \frac{\partial f}{\partial w}\gamma + \cdots$$

Возвысимъ обѣ части въ квадратъ:

$$\delta^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\beta^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2\gamma^2 + \cdots + 2\alpha\beta\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} +$$

$$+ 2\alpha\gamma\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial w} + 2\beta\gamma\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial w} + \cdots$$

Сюда нужно вмѣсто каждой изъ ошибокъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ подставить ея значенія, найденныя изъ наблюденій; въ результатѣ получимъ n подобныхъ равенствъ. Сложивъ эти равенства и раздѣливъ на n, получимъ:

$$\frac{\Sigma\delta^2}{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\frac{\Sigma\alpha^2}{n_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\frac{\Sigma\beta^2}{n_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2\frac{\Sigma\gamma^2}{n_3} + \cdots$$

$$+ 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Sigma\alpha\beta}{n_1 n_2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\Sigma\alpha\gamma}{n_1 n_3} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\Sigma\beta\gamma}{n_2 n_3} + \cdots \quad (2)$$

Примемъ во вниманіе, что $\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha\,\Sigma\beta$; сверхъ того, по доказанному въ § 3, средняя ариѳметическая величина ошибки равна нулю; поэтому

$$\frac{\Sigma\alpha\beta}{n_1 n_2} = \frac{\Sigma\alpha}{n_1} \cdot \frac{\Sigma\beta}{n_2} = 0,$$

$$\frac{\Sigma\alpha\gamma}{n_1 n_3} = \frac{\Sigma\alpha}{n_1} \cdot \frac{\Sigma\gamma}{n_3} = 0,$$

$$\frac{\Sigma\beta\gamma}{n_2 n_3} = \frac{\Sigma\beta}{n_2} \cdot \frac{\Sigma\gamma}{n_3} = 0,$$

. . . .

Далѣе, на основаніи сказаннаго въ § 1

$$\frac{\Sigma\delta^2}{n} = \frac{C}{p}, \quad \frac{\Sigma\alpha^2}{n_1} = \frac{C}{p_1}, \quad \frac{\Sigma\beta^2}{n_2} = \frac{C}{p_2}, \quad \frac{\Sigma\gamma^2}{n_3} = \frac{C}{p_3}, \ldots$$

Сдѣлавъ эти подстановки и сокративъ на C, мы приведемъ уравненіе (2) къ слѣдующей формѣ:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{p_3}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \qquad (3)$$

Здѣсь p, p_1, p_2, p_3, ... суть вѣса величинъ x, u, v, w, ... Мы предполагаемъ вѣса наблюдаемыхъ величинъ p_1, p_2, p_3... извѣстными; тогда формула (3) даетъ вѣсъ величины x, вычисляемой по формулѣ (1). Въ формулу (3 вмѣсто u, v, w, ... нужно подставить ихъ значенія, найденныя изъ наблюденій

Раньше было сказано, что въ геодезическихъ измѣреніяхъ условія опыта таковы, что въ выборѣ наблюдаемыхъ величинъ существуетъ нѣкоторый произволъ. Въ такомъ случаѣ возникаетъ задача: *выбрать наблюдаемыя величины такъ, чтобы по формулѣ* (1) *вычислить величину* x *съ наибольшею точностью*. Задача приводится къ нахожденію наибольшей величины вѣса p, т. е. къ опредѣленію наименьшей величины функціи (3). Замѣтимъ прежде всего, что величины u, v, w, ... не произвольны; онѣ должны удовлетворять нѣкоторому уравненію. Въ самомъ дѣлѣ величина x должна имѣть нѣкоторое опредѣленное значеніе, которое вполнѣ не зависитъ отъ выбора наблюдаемыхъ величинъ; это значеніе получится, когда въ формулу (1) вмѣсто u, v, w, ... подставимъ ихъ значенія, найденныя изъ наблюденій; пусть при этомъ x обратится въ a. Найденное значеніе a не должно измѣняться съ измѣненіемъ наблюдаемыхъ величинъ u, v, w, ...; слѣдовательно

$$f(u, v, w, \ldots) = a \qquad (4)$$

Такимъ образомъ наша задача приводится къ нахожденію условнаго *minimum'a*: нужно опредѣлить u, v, w, .. такъ, чтобы удовлетворялось урав

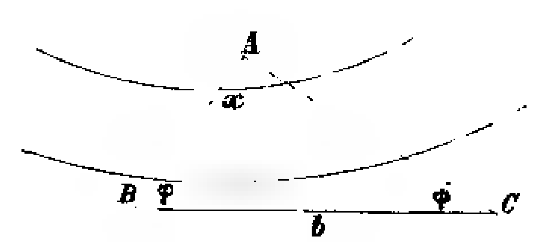
неніе (4) и функція (3) пріобрѣтала наименьшую величину. Задача осложняется тѣмъ обстоятельствомъ, что величины u, v, w не могутъ измѣняться произвольно; каждая изъ этихъ величинъ измѣняется въ нѣкоторыхъ предѣлахъ, что вполнѣ зависитъ отъ тѣхъ условій, при которыхъ совершается опытъ. Пояснимъ сказанное на частномъ примѣрѣ.

6.

Частная задача для поясненія.

Разсмотримъ слѣдующую геодезическую задачу:

Не переходя рѣки, измѣрить разстояніе между двумя точками, лежащими на противоположныхъ сторонахъ рѣки.



Положимъ, что требуется измѣрить разстояніе AB. Пусть наблюдатель находится на той сторонѣ рѣки, гдѣ лежитъ точка B. Для рѣшенія задачи выберемъ произвольную точку C и опредѣлимъ разстояніе BC и углы при точкахъ B и C. Обозначимъ разстояніе BC черезъ b, углы при точкахъ B и C черезъ φ и ψ, искомое разстояніе AB черезъ x. По извѣстной формулѣ тригонометріи находимъ:

$$x = \frac{b \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}. \tag{1}$$

Опредѣлимъ вѣсъ величины x. Для простоты разсужденій предположимъ, что разстояніе BC мы можемъ измѣрить точно, что ошибки зависятъ только отъ измѣренія угловъ φ и ψ. Такъ какъ эти углы измѣряются тѣмъ же приборомъ, то мы можемъ считать вѣса этихъ измѣреній равными; примемъ эти вѣса за единицу; тогда вѣсъ величины x опредѣляется по формулѣ (3, § 5):

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{b^2 \{\sin^2\psi \cos^2(\varphi+\psi) + \sin^2\varphi\}}{\sin^4(\varphi+\psi)}. \tag{2}$$

Нужно теперь выбрать точку C такъ, чтобы вѣсъ p былъ наибольшій, т. е. чтобы выраженіе (2) пріобрѣтало наименьшую величину. Съ измѣненіемъ точки C мѣняются величины b, φ и ψ; но между этими величи-

нами существуетъ зависимость. Если обозначимъ длину AB черезъ a, то

$$\frac{b \sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)} = a$$

Опредѣливъ отсюда b и подставивъ въ равенство (2), получимъ

$$\frac{1}{p} = \frac{a^2\{\sin^2\psi\cos^2(\varphi+\psi)+\sin^2\varphi\}}{\sin^2\psi\sin^2(\varphi+\psi)}. \tag{3}$$

Здѣсь a остается неизмѣннымъ, измѣняются углы φ и ψ. Требуется найти наименьшую величину этого выраженія. Это выраженіе можетъ быть приведено къ слѣдующей формѣ:

$$\frac{1}{p} = a^2\cot^2(\varphi+\psi)\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}\right)+\frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}. \tag{4}$$

Обозначимъ уголъ при A черезъ θ и положимъ $AC = q$; тогда

$$\frac{a\sin\varphi}{\sin\psi} = q, \quad \cot(\varphi+\psi) = -\cot\theta.$$

Выраженіе (4) можетъ быть приведено къ слѣдующей формѣ.

$$\frac{1}{p} = (a^2+q^2)\cot^2\theta + q^2. \tag{5}$$

Вторая часть есть функція двухъ величинъ q и θ, которыя измѣняются независимо одна отъ другой. Выраженіе (5) уменьшается съ уменьшеніемъ q и съ уменьшеніемъ $\cot^2\theta$. Наименьшая величина $\cot^2\theta$ будетъ нуль, когда θ обращается въ прямой уголъ. Что касается $q = AC$, то эту величину можно уменьшать только до нѣкотораго предѣла, такъ какъ дальнѣйшему уменьшенію препятствуетъ условіе задачи: не переходить рѣки. Отсюда выясняется правило для полученія наиболѣе точнаго результата: необходимо выбрать точку C такъ, чтобы уголъ A былъ по возможности близокъ къ прямому углу, а сторона AC возможно мала. Этимъ требованіямъ нужно удовлетворить, сообразуясь съ характеромъ мѣстности.

7

Составленіе эмпирической формулы.

Предположимъ, что мы наблюдаемъ какую нибудь величину, зависимую отъ другой величины, напр. давленіе P въ зависимости отъ температуры t. Пусть наблюдаемыя температуры будутъ t_1, t_2, t_3, ... соотвѣт-

ственныя давленія P_1, P_2, P_3, ... Нанесемъ наши наблюденія на клѣтчатую бумагу. Для этой цѣли на какой нибудь оси отъ постоянной точки отложимъ отрѣзки, равные температурамъ; въ концахъ этихъ отрѣзковъ возставимъ перпендикуляры и на нихъ отложимъ соотвѣтственныя давленія. На бумагѣ получимъ рядъ точекъ; соединивъ сосѣднія точки прямыми, получимъ ломанную линію, которая приблизительно выразитъ ходъ измѣненія давленія съ измѣненіемъ температуры. Требуется *составить возможно простую эмпирическую формулу, которая возможно точнѣе выражаетъ наше наблюденіе.* Предположимъ, что намъ неизвѣстна форма той функціи, которая выражаетъ зависимость давленія отъ температуры; предположимъ, далѣе, что эта функція въ предѣлахъ наблюденія можетъ быть разложена по возрастающимъ степенямъ температуры. Тогда эмпирическая формула будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$P = A + Bt + Ct^2 + \ldots$$

Здѣсь коэффиценты A, B, C, ... суть нѣкоторыя постоянныя числа. Однако безконечнымъ рядомъ неудобно пользоваться и потому мы удерживаемъ въ формулѣ нѣсколько первыхъ членовъ. Предположимъ, что ломанная линія на чертежѣ мало уклоняется отъ прямой линіи; тогда мы можемъ удержать два первыхъ члена:

$$P = A + Bt.$$

Но если ломанная линія на чертежѣ значительно уклоняется отъ прямой линіи, то въ эмпирической формулѣ нужно удержать болѣе двухъ членовъ. Пробуемъ удержать четыре члена.

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3.$$

Для опредѣленія коэффицентовъ подставимъ въ это уравненіе какія нибудь четыре наблюденія; изъ четырехъ полученныхъ уравненій опредѣлимъ четыре коэффицента. Если случится, что коэффиціентъ D весьма малъ въ сравненіи съ другими коэффиціентами, то въ эмпирической формулѣ можно удержать только три члена:

$$P = A + Bt + Ct^2.$$

Можетъ случиться, что изъ теоретическихъ соображеній намъ извѣстна форма функціи, выражающей зависимость давленія отъ температуры, но нѣсколько коэффиціентовъ въ этой функціи остаются неизвѣстными. Положимъ

$$P = f(t, A, B), \tag{1}$$

при чемъ коэффиціенты A и B остаются неизвѣстными. Для опредѣленія коэффиціентовъ вставимъ въ уравненіе (1) наблюдаемыя величины; получимъ рядъ слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned} P_1 &= f(t_1, A, B), \\ P_2 &= f(t_2, A, B), \\ P_3 &= f(t_3, A, B), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{2}$$

Здѣсь мы имѣемъ два неизвѣстныхъ коэффиціента, а число уравненій болѣе двухъ. Если бы наши наблюденія были точны, то коэффиціенты A и B можно было бы опредѣлить такъ, чтобы удовлетворялись всѣ уравненія (2). Но наши наблюденія ошибочны, и потому нельзя удовлетворить всѣмъ уравненіямъ (2). Поэтому возникаетъ задача: какимъ образомъ изъ многихъ опытныхъ уравненій (2) опредѣлить наиболѣе вѣроятныя значенія для коэффиціентовъ A и B. Нужно дать правило для рѣшенія подобной задачи.

8.

Приведеніе эмпирическихъ уравненій къ линейнымъ уравненіямъ

Въ послѣднемъ § мы пришли къ опредѣленію неизвѣстныхъ коэффиціентовъ изъ эмпирическихъ уравненій, содержащихъ наблюдаемыя величины. Вообще наблюдаемыхъ величинъ можетъ быть нѣсколько, обозначимъ ихъ черезъ $u, v, w, \dots$; обозначимъ неизвѣстные коэффиціенты черезъ $x, y, z, \dots$ Значенія наблюдаемыхъ величинъ, найденныя при какомъ нибудь наблюденіи, обозначимъ черезъ $u_1, v_1, w_1, \dots$ Задача наша приводится къ рѣшенію уравненій:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, \dots u_1, v_1, w_1, \dots) &= 0, \\ f_2(x, y, z, \dots u_2, v_2, w_2, \dots) &= 0, \\ f_3(x, y, z, \dots u_3, v_3, w_3, \dots) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Число этихъ уравненій болѣе числа неизвѣстныхъ $x, y, z, \dots$ Требуется изъ уравненій (1) найти наиболѣе вѣроятныя значенія для $x, y, z, \dots$ Такова самая общая задача въ способѣ наименьшихъ квадратовъ.

Прежде чѣмъ рѣшать общую задачу, мы займемся рѣшеніемъ болѣе простой задачи. Разсмотримъ тотъ случай, когда каждое изъ эмпирическихъ уравненій содержитъ только одну наблюдаемую величину; тогда уравненіе можетъ быть разрѣшено относительно наблюдаемой величины. Эмпирическія уравненія принимаютъ слѣдующую форму:

$$f_1(x, y, z, \dots) = u_1,$$
$$f_2(x, y, z, \dots) = u_2, \qquad (2)$$
$$f_3(x, y, z, \dots) = u_3,$$
$$\dots\dots\dots$$

Во вторыхъ частяхъ стоять наблюдаемыя величины. Эмпирическія уравненія (1) вообще не будутъ линейными. Но мы всегда можемъ привести ихъ къ линейнымъ уравненіямъ слѣдующимъ пріемомъ. Прежде всего вмѣсто u_1, u_2, u_3, ... подставимъ ихъ значенія, найденныя изъ наблюденій Изъ уравненій (2) выберемъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ x, y, z, ..; рѣшивъ эти уравненія, найдемъ для неизвѣстныхъ приближенныя значенія a, b, c, ... Положимъ $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $z=c+\zeta$, ... и подставимъ въ уравненія (2). Функціи, стоящія въ первыхъ частяхъ разложимъ по степенямъ ξ, η, ζ, ...; такъ какъ эти величины малы, то въ разложеніи можно отбросить члены выше перваго порядка; въ результатѣ получимъ линейныя уравненія:

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \dots + l_1 = u_1,$$
$$a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \dots + l_2 = u_2,$$
$$a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + \dots + l_3 = u_3,$$
$$\dots\dots\dots$$

Изъ этихъ уравненій нужно опредѣлить наиболѣе вѣроятныя значенія для ξ, η, ζ...

Этотъ пріемъ можетъ быть примѣненъ въ общемъ случаѣ для приведенія уравненій (1) къ линейной формѣ.

9.

Рѣшеніе линейныхъ уравненій, когда вѣса наблюдаемыхъ величинъ одинаковы.

Мы привели эмпирическія уравненія къ линейной формѣ:

$$ax + by + cz + \dots + l = u,$$
$$a'x + b'y + c'z + \dots + l' = u', \qquad (1)$$
$$a''x + b''y + c''z + \dots + l'' = u'',$$
$$\dots\dots\dots$$

Требуется изъ этихъ уравненій опредѣлить наиболѣе вѣроятныя значенія для x, y, z, ... въ томъ случаѣ, когда число уравненій болѣе числа неиз-

вѣстныхъ. Предположимъ, что вѣса наблюдаемыхъ величинъ u, u', u'', ... одинаковы. Для большей ясности предположимъ, что эти величины однородны, измѣряются однимъ и тѣмъ же приборомъ при неизмѣнныхъ условіяхъ. Въ такомъ случаѣ ошибки величинъ u, u', u'', ... имѣютъ тотъ же характеръ, какъ и ошибки при нѣсколькихъ наблюденіяхъ одной и той же величины. Замѣтимъ, что уравненія (1) совмѣстны только въ томъ случаѣ, когда наши наблюденія вполнѣ точны, чего на самомъ дѣлѣ не бываетъ. Предположимъ, что въ первыя части (1) вмѣсто x, y, z, .. подставлены ихъ точныя значенія. Тогда первыя части дадутъ точныя значенія величинъ u, u', u'', .., во вторыхъ же частяхъ стоятъ наблюденныя значенія тѣхъ же величинъ. При такомъ предположеніи разности между первыми и вторыми частями будутъ ошибками наблюденія. А такъ какъ по нашему предположенію наблюдаемыя величины одинаковы (отличаются одна отъ другой на нѣкоторыя вполнѣ точно опредѣленныя величины), то въ сущности мы имѣемъ дѣло съ ошибками одной и той же величины; но въ такомъ случаѣ, какъ было показано въ § 3, сумма квадратовъ ошибокъ должна пріобрѣтать наименьшую величину. Сумма квадратовъ ошибокъ будетъ.

$$(ax + by + cz + \cdots + l - u)^2 + (a'x + b'y + c'z + \cdots + l' - u')^2 + \\ + (a''x + b''y + c''z + \cdots + l'' - u'')^2 + \cdots \qquad (2)$$

Отсюда приходимъ къ заключенію, что x, y, z, ... должны быть опредѣлены такъ, чтобы выраженіе (2) пріобрѣтало наименьшую величину. Послѣдняя же задача рѣшается просто: нужно производныя отъ выраженія (2) по каждому перемѣнному приравнять нулю. Приравнявъ нулю производную по x отъ выраженія (2), по сокращеніи на 2, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$a(ax + by + cz + \cdots + l - u) + a'(a'x + b'y + c'z + \cdots + l' - u') + \\ + a''(a''x + b''y + c''z + \cdots + l'' - u'') + \cdots = 0$$

Чтобы получить подобное уравненіе, нужно каждое изъ уравненій (1) умножить на коэффиціентъ при x и сложить. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Умножимъ каждое изъ уравненій (1) *на коэффиціентъ при одномъ и томъ же неизвѣстномъ и сложимъ, получимъ одно уравненіе: подобныхъ уравненій можно получить столько, сколько неизвѣстныхъ; изъ рѣшенія полученныхъ уравненій найдемъ наиболѣе вѣроятныя значенія неизвѣстныхъ.*

Введемъ слѣдующія сокращенныя обозначенія:

$$(aa) = a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots$$
$$(ab) = ab + a'b' + a''b'' + \cdots \qquad (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Окончательныя уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ будутъ.

$$(aa)x + (ab)y + (ac)z + \cdots + (al) = (au).$$
$$(ba)x + (bb)y + (bc)z + \cdots + (bl) = (bu). \qquad (4)$$
$$(ca)x + (cb)y + (cc)z + \cdots + (cl) = (cu).$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Такъ рѣшаются эмпирическія уравненія (1), когда вѣса наблюдаемыхъ величинъ одинаковы.

Въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи намъ понадобится опредѣленіе величины x изъ уравненій (4) при помощи неопредѣленныхъ множителей. Опредѣлимъ A, B, C, ... изъ уравненій:

$$(aa)A + (ab)B + (ac)C + \cdots = 1.$$
$$(ba)A + (bb)B + (bc)C + \cdots = 0. \qquad (5)$$
$$(ca)A + (cb)B + (cc)C + \cdots = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Умножимъ уравненія (4) соотвѣтственно на A, B, C, ... и сложимъ; принявъ во вниманіе уравненія (5), получимъ:

$$x = (au)A + (bu)B + (cu)C + \cdots$$
$$- (al)A - (bl)B - (cl)C$$

10

Рѣшеніе линейныхъ уравненій, когда вѣса наблюдаемыхъ величинъ различны.

Покажемъ, какъ рѣшаются линейныя уравненія:

$$ax + by + cz + \cdots l = u,$$
$$a'x + b'y + c'z + \cdots l' = u', \qquad (1)$$
$$a''x + b''y + c''z'' + \cdots l'' = u''.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

въ томъ случаѣ, когда вѣса наблюдаемыхъ величинъ u, u', u'', ... различны; обозначимъ эти вѣса черезъ p, p', p'', ... Для этой цѣли введемъ новыя величины:

$$v = u\sqrt{p}, \quad v' = u'\sqrt{p'}, \quad v'' = u''\sqrt{p''}, \ldots \tag{2}$$

Умножимъ уравненія (1) на квадратные корни изъ вѣсовъ; получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} &\sqrt{p}\,(ax + by + cz + \cdots + l) = v, \\ &\sqrt{p'}\,(a'x + b'y + c'z + \cdots + l') = v', \\ &\sqrt{p''}\,(a''x + b''y + c''z + \cdots + l'') = v'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Вѣсъ каждой величины (2) равенъ единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (3, § 5) вѣса этихъ величинъ будутъ:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 = 1, \quad \frac{1}{p'}\left(\frac{\partial v'}{\partial u'}\right)^2 = 1, \quad \frac{1}{p''}\left(\frac{\partial v''}{\partial u''}\right)^2 = 1, \ldots$$

Величины, стоящія во вторыхъ частяхъ уравненій (3), мы можемъ принять за наблюдаемыя величины; вѣса этихъ величинъ, какъ показано, равны единицѣ. Поэтому уравненія (5) могутъ быть разрѣшены пріемомъ, указаннымъ въ § 9. Умножимъ каждое изъ уравненій (3) на коэффиціентъ при x и сложимъ; если вмѣсто v, v', v'', ... подставимъ ихъ выраженія (2), то получимъ слѣдующее уравненіе:

$$ap(ax + by + cz + \cdots + l - u) + a'p'(a'x + b'y + c'z + \cdots + l' - u') +$$
$$+ a''p''(a''x + b''y + c''z + \cdots + l'' - u'') + \cdots = 0.$$

То же самое уравненіе получимъ, если мы умножимъ уравненія (1) соотвѣтственно на ap, $a'p'$, $a''p''$, ... и сложимъ. Отсюда вытекаетъ слѣдующій результатъ:

Умножимъ каждое уравненіе (1) *на коэффиціентъ при одномъ и томъ же неизвѣстномъ и на соотвѣтствующій вѣсъ и сложимъ, получимъ одно уравненіе; подобныхъ уравненій можно получить столько, сколько неизвѣстныхъ; изъ рѣшенія полученныхъ уравненій найдемъ наиболѣе вѣроятныя значенія для неизвѣстныхъ.*

11.

Способъ Гаусса для рѣшенія эмпирическихъ уравненій и для опредѣленія вѣсовъ.

Гауссъ далъ дальнѣйшее и окончательное развитіе способа наименьшихъ квадратовъ. Покажемъ, въ чемъ заключается способъ Гаусса. Дана система эмпирическихъ уравненій:

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz + \cdots + l &= u, \\
a'x + b'y + c'z + \cdots + l' &= u', \\
a''x + b''y + c''z + \cdots + l'' &= u'', \\
\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Гауссъ предложилъ рѣшать эти уравненія при помощи неопредѣленныхъ множителей. Подберемъ множители h, h', h'', ... такъ, чтобы удовлетворялись уравненія:

$$
\begin{aligned}
ah + a'h' + a''h'' + \cdots &= 1, \\
bh + b'h' + b''h'' + \cdots &= 0, \\
ch + c'h' + c''h'' + \cdots &= 0. \\
\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Умножимъ уравненія (1) соотвѣтственно на h, h', h'', ... и сложимъ; въ результатѣ, принявъ во вниманіе уравненія (2), получимъ.

$$x = h(u - l) + h'(u' - l') + h''(u'' - l'') + \cdots \tag{3}$$

Число уравненій (2) менѣе числа искомыхъ множителей h, h', h'', ...; поэтому уравненія (2) даютъ неопредѣленное рѣшеніе. Для полученія опредѣленнаго рѣшенія Гауссъ ставитъ слѣдующую задачу: *опредѣлить изъ уравненій* (2) h, h', h'', ... *подъ условіемъ, чтобы вѣсъ величины* x, *данной уравненіемъ* (3), *былъ наибольшій*. Покажемъ, какъ рѣшается эта задача.

Обозначимъ вѣса величинъ u, u', u'', ... черезъ p, p', p'', ...; обозначимъ вѣсъ величины x, данной уравненіемъ (3), черезъ q. По формулѣ (3, § 5) находимъ:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{1}{p}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{p'}\left(\frac{\partial x}{\partial u'}\right)^2 + \frac{1}{p''}\left(\frac{\partial x}{\partial u''}\right)^2 + \cdots = \\
&= \frac{h^2}{p} + \frac{h'^2}{p'} + \frac{h''^2}{p''} + \cdots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Задача Гаусса приводится къ нахожденію относительнаго minimum'a: *нужно опредѣлить* h, h', h'',.... *такъ, чтобы удовлетворялись уравненія* (2) *и выраженіе* (4) *пріобрѣтало наименьшую величину*. Эта послѣдняя задача рѣшается по извѣстнымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Остается показать, что способъ Гаусса приводитъ къ тѣмъ же результатамъ, какъ и прежній способъ, изложенный въ §§ 9 и 10. При этомъ доказательствѣ мы можемъ ограничиться случаемъ, когда вѣса наблюдаемыхъ величинъ u, u', u'',.... равны: такъ какъ болѣе общій случай, какъ показано въ § 10, приводится къ первому случаю. Итакъ предположимъ, что вѣса наблюдаемыхъ величинъ u, u', u''... равны единицѣ; тогда равенство (4) приводится къ слѣдующему:

$$\frac{1}{q} = h^2 + h'^2 + h''^2 + \qquad (5)$$

Нужно найти наименьшую величину выраженія (5) подъ условіемъ, чтобы удовлетворялись уравненія (2). Для рѣшенія этой послѣдней задачи будемъ поступать по правиламъ, изложеннымъ въ дифференціальномъ исчисленіи.

Умножимъ первыя части уравненій (2) на неопредѣленные множители $2A$, $2B$, $2C$,.... сложимъ и ихъ сумму вычтемъ изъ выраженія (5); получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\begin{aligned} & h^2 + h'^2 + h''^2 + \cdots\cdots \\ - & 2A\,(ah + a'h' + a''h'' + \cdots) \\ - & 2B\,(bh + b'h' + b''h'' + \cdots\cdots) \\ - & 2C\,(ch + c'h' + c''h'' + \cdots) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

По правиламъ, изложеннымъ въ дифференціальномъ исчисленіи, нужно производныя отъ этого выраженія по измѣняемости h, h', h''.... приравнять нулю: получимъ уравненія, изъ которыхъ найдемъ.

$$\begin{aligned} h &= Aa + Bb + Cc + \cdots, \\ h' &= Aa' + Bb' + Cc' + \cdots\cdots, \\ h'' &= Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots\cdots. \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \qquad (6)$$

Уравненія (2) и (6) достаточны для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ величинъ h, h', h''.... A, B, C,.... Мы можемъ исключить изъ нашихъ уравненій h, h', h'',.... Подставимъ въ уравненія (2) вмѣсто h, h', h'',.... ихъ выраженія (6); принявъ во вниманіе сокращенныя обозначенія (3, § 9),

получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned}(aa)A + (ab)B + (ac)C + \cdots &= 1,\\ (ba)A + (bb)B + (bc)C + \cdots &= 0,\\ (ca)A + (cb)B + (cc)C + \cdots &= 0.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{7}$$

Подставивъ вмѣсто $h, h', h'', \ldots$ ихъ выраженія (6) въ равенство (3), получимъ:

$$\begin{aligned}x = (aa)A + (ba)B + (ca)C + \cdots\\ - (al)A - (bl)B - (cl)C - \cdots\end{aligned} \tag{8}$$

Итакъ способъ Гаусса окончательно приводится къ слѣдующимъ дѣйствіямъ: нужно изъ уравненій (7) опредѣлить $A, B, C, \ldots$ и найденныя значенія подставить въ формулу (8). Но точно такой же результатъ найденъ былъ въ § 9. Этимъ доказано, что способъ Гаусса приводитъ къ тѣмъ же результатамъ, какъ и прежній способъ, изложенный въ §§ 9 и 10. Итакъ способъ Гаусса приводится къ слѣдующему:

Изъ эмпирическихъ уравненій при помощи неопредѣленныхъ множителей каждое неизвѣстное опредѣляется такъ, чтобы вѣсъ его былъ наибольшій.

Способъ Гаусса окончательно подтверждаетъ, что пріемами, изложенными въ §§ 9 и 10, неизвѣстныя величины изъ эмпирическихъ уравненій опредѣляются съ наибольшею точностью.

12.

Приведеніе общей задачи къ линейнымъ уравненіямъ.

До сихъ поръ мы ограничивали наше изслѣдованіе частнымъ случаемъ, когда въ каждомъ эмпирическомъ уравненіи входитъ только одна наблюдаемая величина. Покажемъ теперь, какъ рѣшается самый общій случай, который приводится къ уравненіямъ:

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z, \ldots u_1, v_1, w_1, \ldots) &= 0,\\ f_2(x, y, z, \ldots u_2, v_2, w_2, \ldots) &= 0,\\ f_3(x, y, z, \ldots u_3, v_3, w_3, \ldots) &= 0.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{1}$$

Въ этихъ уравненіяхъ $u_1, v_1, w_1, \ldots$ суть значенія величинъ $u, v, w, \ldots$, найденныя при одномъ изъ наблюденій. Прежде всего покажемъ, что эмпи-

рическія уравненія (1) могутъ быть приведены къ линейной формѣ относительно всѣхъ величинъ, входящихъ въ эти уравненія.

Изъ системы (1) выдѣлимъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$; изъ рѣшенія этихъ уравненій найдемъ приближенныя значенія $a, b, c \ldots$ для неизвѣстныхъ. Положимъ

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z', \ldots \qquad (2)$$

Обозначимъ черезъ $g_i, h_i, k_i, \ldots$ наблюденныя значенія величинъ $u_i, v_i, w_i, \ldots$; положимъ:

$$u_i = g_i + u_i', \quad v_i = h_i + v_i', \quad w_i = k_i + w_i', \ldots \qquad (3)$$

Величины $u_i', v_i', w_i', \ldots$ мы можемъ принять за наблюдаемыя величины; значенія этихъ величинъ, найденныя изъ наблюденій, равны нулю; но въ дѣйствительности эти величины не будутъ нулями, а лишь малыми величинами. Вѣса величинъ $u_i', v_i', w_i', \ldots$ равны вѣсамъ соотвѣтствующихъ величинъ $u_i, v_i, w_i, \ldots$ Въ уравненія (1) вмѣсто $x, y, z, \ldots u_i, v_i, w_i, \ldots$ подставимъ ихъ выраженія (2) и (3); разложимъ функціи по степенямъ $x', y', z', \ldots u_i', v_i', w_i', \ldots$ Принявъ во вниманіе, что мы имѣемъ дѣло съ малыми величинами, мы можемъ отбросить малыя величины выше перваго порядка; въ результатѣ уравненія (1) превратятся въ линейныя:

$$a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + \cdots = \alpha_1 u_1' + \beta_1 v_1' + \gamma_1 w_1' + \cdots + \lambda_1,$$
$$a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + \cdots = \alpha_2 u_2' + \beta_2 v_2' + \gamma_2 w_2' + \cdots + \lambda_2,$$
$$a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + \cdots = \alpha_3 u_3' + \beta_3 v_3' + \gamma_3 w_3' + \cdots + \lambda_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Изъ этихъ уравненій нужно найти наиболѣе точныя значенія для $x', y', z' \ldots$

13.

Рѣшеніе общей задачи.

Мы привели общую задачу къ рѣшенію линейныхъ уравненій:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \lambda_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots = \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2 + \gamma_2 w_2 + \cdots + \lambda_2, \qquad (1)$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots = \alpha_3 u_3 + \beta_3 v_3 + \gamma_3 w_3 + \cdots + \lambda_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Наблюдаемыя величины $u_1, u_2, u_3, \ldots$ имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ, обозначимъ его черезъ p_1; вѣсъ величинъ $v_1, v_2, v_3, \ldots$ обозначимъ черезъ p_2; вѣсъ величинъ $w_1, w_2, w_3, \ldots$ обозначимъ черезъ p_3 и т. д. Введемъ новыя величины, положимъ

$$\omega_i = \alpha_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_i w_i + \cdots + \lambda_i . \tag{2}$$

Уравненія (1) примутъ слѣдующую форму:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots &= \omega_1 , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots &= \omega_2 , \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots &= \omega_3 . \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначимъ вѣса величинъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ черезъ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Покажемъ, какъ находятся эти вѣса. Изъ уравненія (2) на основаніи формулы (3. § 5) имѣемъ:

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_i}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial v_i}\right)^2 + \frac{1}{p_3}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial w_i}\right)^2 + \cdots =$$

$$= \frac{\alpha_i^2}{p_1} + \frac{\beta_i^2}{p_2} + \frac{\gamma_i^2}{p_3} + \cdots$$

Такимъ образомъ вѣса величинъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ опредѣляются изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_1} &= \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\beta_1^2}{p_2} + \frac{\gamma_1^2}{p_3} + \cdots , \\ \frac{1}{q_2} &= \frac{\alpha_2^2}{p_1} + \frac{\beta_2^2}{p_2} + \frac{\gamma_2^2}{p_3} + \cdots , \\ \frac{1}{q_3} &= \frac{\alpha_3^2}{p_1} + \frac{\beta_3^2}{p_2} + \frac{\gamma_3^2}{p_3} + \cdots , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Мы можемъ теперь разсматривать $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ какъ наблюдаемыя величины; вѣса этихъ величинъ опредѣляются изъ уравненій (4). Но уравненія (3) имѣютъ ту же форму, какъ и уравненія (1. § 10). Поэтому уравненія (3) рѣшаются по правиламъ, изложеннымъ въ § 10.

Заключеніе. Здѣсь изложено въ краткой формѣ все, что необходимо для обработки опытныхъ данныхъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ на

самомъ дѣлѣ приводится къ сложнымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ. Въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ указаны практическія правила, облегчающія эти дѣйствія; сверхъ того указываются правила для отбрасыванія сомнительныхъ наблюденій. Читатель, желающій познакомиться съ подробностями способа наименьшихъ квадратовъ, можетъ обратиться къ болѣе полнымъ сочиненіямъ.

В. Ермаковъ.